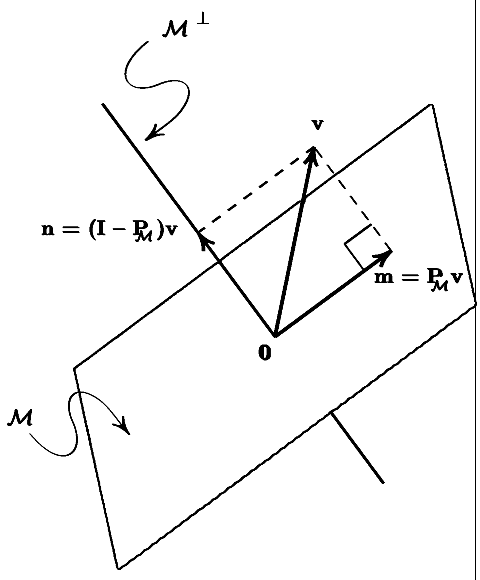
Ortogonalne projekcije

Ortogonalna projekcija Za $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, neka je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$, gdje je $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}$ i $\boldsymbol{n} \in \mathcal{M}^{\perp}$.

- Vektor $\boldsymbol{m}$ zovemo *ortogonalna projekcija* od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{M}$.
- Projektor $P_{\mathcal{M}}$ na $\mathcal{M}$ paralelno sa $\mathcal{M}^{\perp}$ zovemo *ortogonalni projektor* na $\mathcal{M}$.
- $P_{\mathcal{M}}$ je jedinstveni linearni operator takav da $P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m}$.



1. Neka je $\mathcal{P}_2$ vektorski prostor svih realnih polinoma stepena ≤ 2,

$$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Provjeriti da li je sa $\langle p, q\rangle = p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$ definiran unutrašnji (skalarni) proizvod na $\mathcal{P}_2$.

(b) Za podprostor $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ generisan polinomima $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ odredite ortogonalni komplement.

(c) Odredite ortogonalnu projekciju od $p(x) = -2x^2 + x + 2$ na $\mathcal{L}$.

Konstrukcija ortogonalnog projektora Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od $M_{n\times r}$ i $N_{n\times n-r}$ redom baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$. Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$ su

- $P_{\mathcal{M}} = M(M^{\top}M)^{-1}M^{\top}$ i $P_{\mathcal{M}^{\perp}} = N(N^{\top}N)^{-1}N^{\top}$.

Ako M i N sadrže ortonormirane baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$, tada

- $P_{\mathcal{M}} = MM^{\top}$ i $P_{\mathcal{M}^{\perp}} = NN^{\perp}$
- $P_{\mathcal{M}} = U\begin{pmatrix} I_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}U^{\top}$, gdje je $U = (M|N)$.
- $P_{\mathcal{M}^{\perp}} = I - P_{\mathcal{M}}$ u svim slučajevima.

2. Pronaći ortogonalnu projekciju od b na $\mathcal{M} = \mathrm{span}\{u\}$, pa onda odrediti projekciju od b na $\mathcal{M}^{\perp}$, gdje je $b = (4, 8)^{\top}$ i $u = (3, 1)^{\top}$.

3. Za matricu $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ takvu da je $\mathrm{rang}(A) = r$, opisati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora od A.

4. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ i $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}$.

(a) Izračunati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora pridruženih matrici A.

(b) Odrediti tačku u $\ker(A)^{\perp}$ koja je najbliža tački b.

5. Neka je $u \in \mathbb{R}^n$ nenula vektor i posmatrajmo liniju $\mathcal{L} = \text{span}\{u\}$. Konstruisati ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$, i onda odrediti ortogonalnu projekciju proizvoljnog vektora $x \in \mathbb{R}^n$ na $\mathcal{L}$.

Ortogonalni projektori Pretpostavimo da je $P \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ projektor, tj. $P^2 = P$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne tvrdnji: P je ortogonalni projektor.

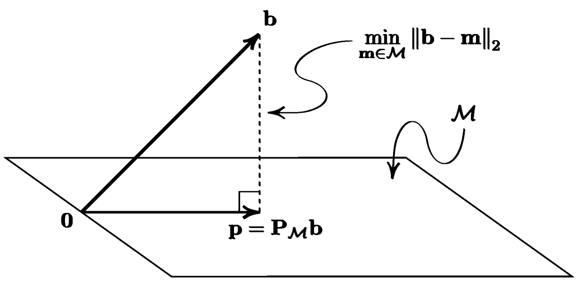
- $im(P) \perp ker(P)$.
- $P^\top = P$ (tj., ortogonalni projektor $\Leftrightarrow P^2 = P = P^\top$).
- $\|P\|_2 = 1$ za matričnu 2-normu.

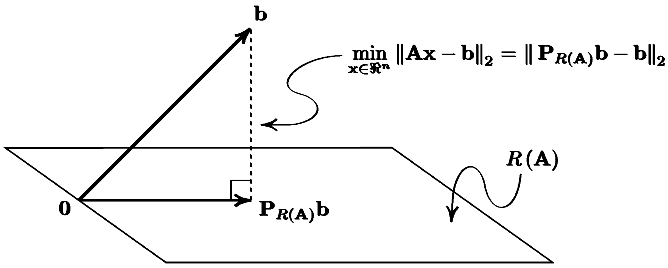
(Prisjetimo se matrična 2-norma, matrice A, je definisana $\|A\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \|A\boldsymbol{x}\|_2$).

Teorema o najbližoj tački Neka je $\mathcal{M}$ podprostor unitarnog prostora $\mathcal{V}$, i neka je $\boldsymbol{b}$ vektor u $\mathcal{V}$. Jedinstveni vektor u $\mathcal{M}$ koji je najbliži vektoru $\boldsymbol{b}$ je $\boldsymbol{p} = P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{b}$, ortogonalna projekcija od $\boldsymbol{b}$ na $\mathcal{M}$. Drugim riječima,

$$\min_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{m}\|_2 = \|\boldsymbol{b} - P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{b}\|_2 = udaljenost(\boldsymbol{b}, \mathcal{M}).$$

Ovo se zove *ortogonalna udaljenost* između $\boldsymbol{b}$ i $\mathcal{M}$.





6. Kao što znamo od ranije, tijelo u $\mathbb{R}^m$ sa paralelnim suprotnim stranama, gdje su susjedne strane definisane sa vektorima koji formiraju linearno nezavisan skup $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ se zove n-dimenzionalni paralelopiped. Dvodimenzionalni paralelopiped je paralelogram, dok je trodimenzionalni paralelopiped "nahereni" kvadar. Odrediti zapreminu dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog paralelopipeda, i onda napraviti prirodno proširenje za iznalaženje zapremine n-dimenzionalnog paralelopipeda.

Riješenje problema najmanjih kvadrata Svaka od sljedeće tri tvrdnje su ekvivalentne tvrdnji: $\widehat{\boldsymbol{x}}$ je riješenje problema najmanjih kvadrata za moguć slučaj nesingularnosti linearnog sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

- $\|A\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2 = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$.
- $A\widehat{\boldsymbol{x}} = P_{im(A)}\boldsymbol{b}$.
- $A^\top A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^\top\boldsymbol{b}$ $\quad (A^*A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^*\boldsymbol{b}$ kada je $A \in \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C}))$.

Oprez! Ovo su vrijedne teoriske karakterizacije, ali ni jedna nije preporučljiva kada je u pitanju račun sa pokretnim zarezom. Numerička računanja su tema nekog drugog teksta.

(#) Pronaći ortogonalnu projekciju od b na $\mathcal{M} = \operatorname{span}\{u\}$, pa onda odrediti ortogonalnu projekciju od b na $\mathcal{M}^\perp$, gdje je $b = (4\ 8)^T$ i $u = (3\ 1)^T$.

Rj:

Konstrukcija ortogonalnog projektora

Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od $M_{n\times r}$ i $N_{n\times n-r}$ baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ redom. Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ su

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T \quad i \quad P_{\mathcal{M}^\perp} = N(N^TN)^{-1}N^T$$

Isto tako vrijedi $P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}}$.

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{u\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ kolone matrice M su baza za $\mathcal{M}$

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T = u\underbrace{(u^Tu)^{-1}}_{\in\mathbb{R}}u^T = \frac{uu^T}{u^Tu} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}(3\ 1)}{(3\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{M}^\perp} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

pa je $P_{\mathcal{M}^\perp} b = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ i $P_{\mathcal{M}} b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ tj. ortogonalna projekcija od $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ na $\mathcal{M}$ je $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ a ortogonalna projekcija od b na $\mathcal{M}^\perp$ je $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(#) Za matricu $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ takvu da je $rang(A) = r$, opisati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora od A.

Rj: Neka su $B_{m \times r}$ i $N_{n \times n-r}$ matrice čije su kolone baze za $im(A)$ i $ker(A)$, redom, npr. B može sadržavati osnovne kolone u A.
Prisjetimo se teoreme ortogonalne dekompozicije

Teorema ortogonalne dekompozicije
Za svaku matricu $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$im(A)^{\perp} = ker(A^T) \quad i \quad ker(A)^{\perp} = im(A^T).$$

Sad ako iskoristimo teoremu

Konstrukcije ortogonalnih operatora
Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od $M_{n \times r}$ i $N_{n \times n-r}$ baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$ redom.
Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$ su

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T \quad i \quad P_{\mathcal{M}^{\perp}} = N(N^TN)^{-1}N^T$$

Isto tako, uvijek vrijedi $P_{\mathcal{M}^{\perp}} = I - P_{\mathcal{M}}$.

možemo zaključiti da je

$$P_{im(A)} = B(B^TB)^{-1}B^T,$$

$$P_{ker(A)} = N(N^TN)^{-1}N^T,$$

$$P_{im(A^T)} = P_{ker(A)^{\perp}} = I - P_{ker(A)}, \quad P_{ker(A^T)} = P_{im(A)^{\perp}} = I - P_{im(A)}.$$

Primjetimo da ako je $rang(A) = n$, tada su sve kolone u A osnovne pa vrijedi $P_{im(A)} = A(A^TA)^{-1}A^T$.

(#) Neka je $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Izračunati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora pridruženih matrici A.

(b) Odrediti tačku u $\ker(A)^\perp$ koja je najbliža tački b.

Rj. (a)

Prema prethodnom zadatku, koj je direktna posljedica teoreme ortogonalne dekompozicije

$$\underline{\operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^T) \quad ; \quad \ker(A)^\perp = \operatorname{im}(A^T)}$$

i teoreme za konstrukciju ortogonalnih operatora

$$\underline{P_M = M(M^TM)^{-1}M^T \quad ; \quad P_{M^\perp} = N(N^TN)^{-1}N^T}$$

$$\underline{P_{M^\perp} = I - P_M}$$

imamo da je $P_{\operatorname{im}(A)} = B(B^TB)^{-1}B^T$, $P_{\ker(A)} = N(N^TN)^{-1}N^T$,

$P_{\operatorname{im}(A^T)} = I - P_{\ker(A)}$ i $P_{\ker(A^T)} = I - P_{\operatorname{im}(A)}$, gdje su

B i N matrice čije su kolone, redom, baze za i $\ker(A)$.

Pa pronađimo baze za $\operatorname{im}(A)$ i $\ker(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III_v - I_v]{II_v - I_v \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A \Rightarrow \operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$Ax=0 \Leftrightarrow E_Ax=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1+2x_2=0 \\ x_3=0 \end{matrix} \Rightarrow x=\begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}s, \ s\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ker(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N^T N = (-2\ 1\ 0)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (N^T N)^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I_v:6}{\underset{II_v:2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{II_v - I_v}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & -1/6 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{II_v \cdot 6}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{I_v - II_v \cdot \frac{1}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6}$$

$$(B^T B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_{im(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{ker(A^T)} = I - P_{im(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$N N^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(-2\ 1\ 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{ker(A)} = N(N^T N)^{-1} \cdot N^T = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_{im(A^T)} = I - P_{ker(A)} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(#) Neka je $u \in \mathbb{R}^n$ nenula vektor i posmatrajmo liniju $\mathcal{L} = \text{span}\{u\}$. Konstruisati ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$, i onda odrediti ortogonalnu projekciju proizvoljnog vektora $x \in \mathbb{R}^n$ na $\mathcal{L}$.

Rj.

Konstrukcija ortogonalnog projektora

Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od M i N baze ~~za~~ $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$, redom. Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ su

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T \quad \text{i} \quad P_{\mathcal{M}^\perp} = N(N^TN)^{-1}N^T \qquad \dots(*)$$

Sam vektor u je baza za $\mathcal{L}$, pa ako sa matricom M označimo $M = \left[\begin{matrix} | \\ u \\ | \end{matrix}\right]_{n\times 1}$ prema $(*)$ imamo da je

$$\boxed{u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}$$

$$P_{\mathcal{L}} = u\underbrace{(u^Tu)^{-1}}_{\in\mathbb{R}}u^T = \frac{uu^T}{u^Tu}$$

ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$. Ortogonalna projekcija proizvoljnog vektora x na $\mathcal{L}$ je data sa

$$P_{\mathcal{L}}x = \frac{uu^T}{u^Tu}x = \left(\frac{u^Tx}{u^Tu}\right)u$$

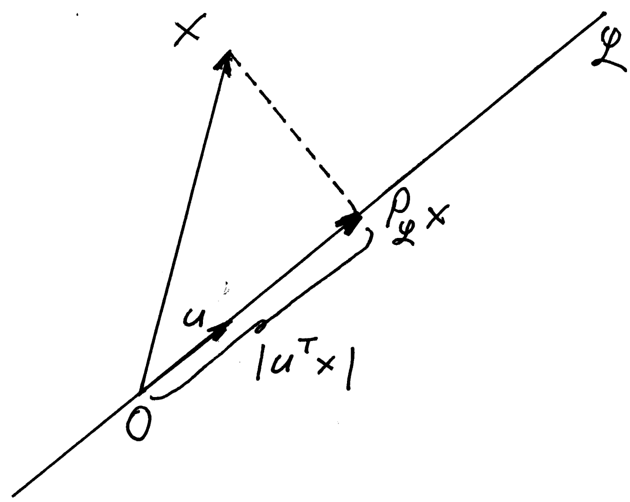
zato što je $(uu^T)x = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}(u_1\ u_2 \dots u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2u_2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_1 & \dots & u_nu_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1u_1x_1 + u_1u_2x_2 + \dots + u_1u_nx_n \\ u_2u_1x_1 + u_2u_2x_2 + \dots + u_2u_nx_n \\ \vdots \\ u_nu_1x_1 + u_nu_1x_2 + \dots + u_nu_nx_n \end{pmatrix} = (u^Tx)u.$$

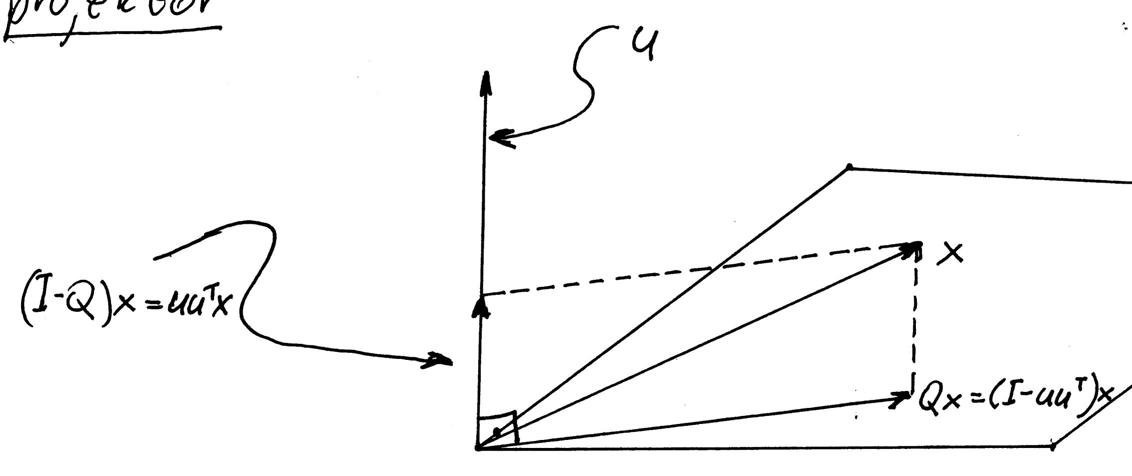
Napomena: Ako je $\|u\|_2 = 1$, tada $P_{\mathcal{L}} = uu^T$, pa je

$$P_{\mathcal{L}} x = uu^T x = (u^T x) u \quad \text{i} \quad \|P_{\mathcal{L}} x\|_2 = |u^T x| \, \|u\|_2 = |u^T x| .$$

Ovo povlači geometrijsko tumačenje za veličine u standardnom unutrašnjem proizvodu. Kaže da, ako je u vektor jedinične dužine u $\mathcal{L}$, tada, kao što je prikazano na slici, $|u^T x|$ je dužina

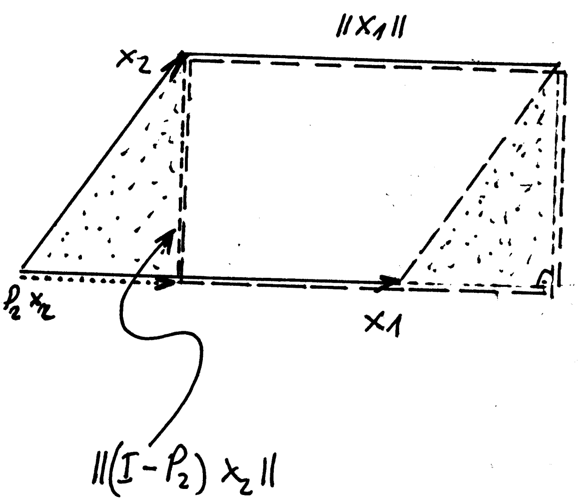


ortogonalne projekcije od x na liniju generisanu sa u. Na kraju, primijetimo da kako je $P_{\mathcal{L}} = uu^T$ je ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$, moramo imati da je $P_{\mathcal{L}^\perp} = I - uu^T$ ortogonalni projektor na $\mathcal{L}^\perp$. $Q = I - uu^T$ se zove <u>elementarni ortogonalni projektor</u>



(#) Kao što znamo od ranije, tijelo u $\mathbb{R}^m$ sa paralelnim suprotnim stranama, gdje su susjedne strane definisane sa vektorima koji formiraju linearno nezavisan skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se zove n-dimenzionalni paralelopiped. Dvodimenzionalni paralelopiped je paralelogram, dok je trodimenzionalni paralelopiped "nahereni" kvadar. Odrediti zapreminu dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog paralelopipeda, i onda napraviti prirodno proširenje za iznalaženje zapremine n-dimenzionalnog paralelopipeda.

Rj. Posmatrajmo dvodimenzionalni slučaj.



U dvodimenzionalnom slučaju zapremina je u stvari površina i sa slike ni teško vidjeti (podudarnost SSU) da su "tačkasti" trouglovi podudarni (a time su im i površine podudarne).

Širina isprekidanog pravougaonika je $\|x_1\|_2$. Kolika je visina isprekidanog pravougaonika.

Ako sa P_2 označimo ortogonalnu projekciju na prostor (liniju) generisanu sa x_1 tada je $P_2 x_2$ tačkasti vektor sa slike.

Znamo da:

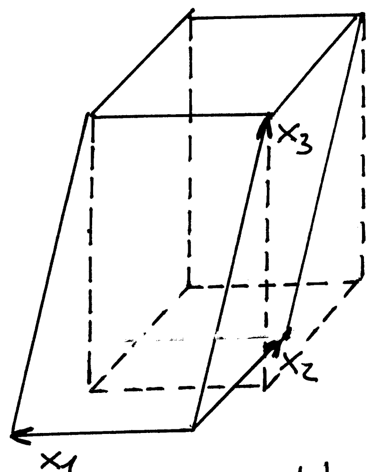
Ako je P_M ortogonalni projektor na M tada je

$P_{M^\perp} = I - P_M$ ortogonalni projektor na $M^\perp$.

Vidimo da će $I-P_2$ biti ortogonalni projektor na span$\{x_1\}^\perp$, drugim riječima visina isprekidanog pravougaonika je $\|(I-P_2)x_2\|$. Prema tome površina paralelograma je

$$P = \|x_1\|_2 \cdot \|(I-P_2)x_2\|_2$$

Posmatrajmo sad trodimenzionalni slučaj.



Zapremina trodimenzionalnog paralelopipeda se računa po formuli površina baze puta visina. Površinu baze smo izračunali u prethodnom dijelu i ona iznosi

$$\|x_1\|_2 \|(I-P_2)x_2\|_2.$$

Ako sa P_3 označimo ortogonalnu projekciju na span$\{x_1,x_2\}$ tada je $(I-P_3)x_3$ ortogonalna projekcija na $(\text{span}\{x_1,x_2\})^\perp$ pa je dužina za visinu paralelopipeda

$$\|(I-P_3)x_3\|_2$$

Prema tome zapremina paralelopipeda, u trodimenzionalnom slučaju je $V = \|x_1\|_2 \|(I-P_2)x_2\|_2 \|(I-P_3)x_3\|_2$.

Sad matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je zapremina paralelopipeda generisana linearno nezavisnim skupom $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ $V_n = \|x_1\|_2 \|(I-P_2)x_2\|_2 \|(I-P_3)x_3\|_2 \dots \|(I-P_n)x_n\|_2$

gdje su P_k ortogonalne projekcije na span$\{x_1,x_2,\dots,x_{k-1}\}$.
Primjetimo da ako je $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ortogonalan skup, $V_n = \|x_1\|_2 \|x_2\|_2 \dots \|x_n\|_2$.